

Nome _____ Nº _____ Turma: _____ Data: ____ / ____ / ____

Professor _____ Classificação _____

Questão Aula – AXIOMÁTICA DAS PROBABILIDADES

Para todas as questões, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações.

1. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis de S , tais que $p(A) = 0,7$ e $p(B) = 0,4$

- (3) 1.1. Diga, **justificando**, entre que valores pode variar $p(\bar{A} \cap B)$?

Sabemos que $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$

Portanto, para enquadrar $p(\bar{A} \cap B)$ precisamos de enquadrar $p(A \cap B)$

Sabemos que $p(A \cup B) \leq 1$, ou seja, $p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0,7 + 0,4 - p(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow -p(A \cap B) \leq 1 - 1,1 \Leftrightarrow p(A \cap B) \geq 0,1$$

Também temos sempre $p(A \cap B) \leq \min\{p(A), p(B)\}$ *ver notas*

Assim, $0,1 \leq p(A \cap B) \leq 0,4$

$$-0,4 \leq -p(A \cap B) \leq -0,1$$

$$0,4 - 0,4 \leq p(B) - p(A \cap B) \leq 0,4 - 0,1$$

Ou seja, $0 \leq p(\bar{A} \cap B) \leq 0,3$

Notas: $A \cap B \subset A \Rightarrow p(A \cap B) \leq p(A)$
 $A \cap B \subset B \Rightarrow p(A \cap B) \leq p(B)$

- (3) 1.2. Sendo $p(\bar{A} \cup B) = 0,6$, averigue se A e B são acontecimentos independentes.

A e B são independentes $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$\text{Temos } p(A) \times p(B) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$$

Precisamos de conhecer o valor de $p(A \cap B)$ a partir de $p(\bar{A} \cup B)$

$$\text{Sabemos que } p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(B) - p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) + p(B) - [p(B) - p(A \cap B)]$$

$$\text{Ou seja, } p(\bar{A} \cup B) = p(\bar{A}) + p(A \cap B)$$

$$\text{Substituindo os valores conhecidos vem: } 0,6 = 0,3 + p(A \cap B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = 0,3$$

Portanto, como $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

2. Nas eleições legislativas de 2015 foram eleitos para a Assembleia da República deputados representantes de cinco partidos, sendo X o partido com mais deputados. Sabe-se ainda que:
- 70% dos deputados são homens;
 - 40% dos deputados são do partido X ;
 - 15% dos deputados são mulheres que pertencem aos quatro partidos da oposição.

(6) 2.1. Escolhe-se ao acaso um deputado da Assembleia da República.

Qual é a probabilidade de esse deputado ser mulher ou ser de um partido da oposição?

Consideremos os acontecimentos: H : o deputado é homem

X : o deputado é do partido X

Sabemos que $p(H) = 70\%$, $p(X) = 40\%$, $p(\overline{H} \cap \overline{X}) = 15\%$ e queremos determinar $p(\overline{H} \cup \overline{X})$

Temos
$$p(\overline{H} \cup \overline{X}) = p(\overline{H}) + p(\overline{X}) - p(\overline{H} \cap \overline{X})$$

$$= 30\% + 60\% - 15\% = 75\%$$

Outro processo: Organizemos os dados numa tabela

Temos
$$p(\overline{H} \cup \overline{X}) = p(\overline{H \cap X}) = 1 - p(H \cap X)$$

	H	\overline{H}	Total
X	25%	15%	40%
\overline{X}	45%	15%	60%
Total	70%	30%	100%

Portanto, precisamos de saber a probabilidade de ter sido escolhido um homem do partido X .

Assim,
$$p(\overline{H} \cup \overline{X}) = 100\% - 25\% = 75\%$$

(3) 2.2. Escolhe-se ao acaso um deputado da Assembleia da República.

Qual é a probabilidade de esse deputado ser do partido X sabendo que é homem?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

De acordo com as designações anteriores, pretendemos determinar $p(X/H)$

Temos,
$$p(X/H) = \frac{p(X \cap H)}{p(H)} = \frac{25\%}{70\%} = \frac{5}{14}$$

(5) 3. Sendo S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e A e B dois acontecimentos possíveis de S , mostre que $p(\overline{A \cap B}/B) = p(\overline{A}/B)$.

Começamos pelo 1.º membro (por ser relativamente mais complicado)

$$\begin{aligned}
 p(\overline{A \cap B}/B) &= p(\overline{A \cap B} \cap B/B) = \frac{p((\overline{A \cap B}) \cap B)}{p(B)} && \text{lei de De Morgan e prob. condicionada} \\
 &= \frac{p((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B))}{p(B)} = \frac{p((\overline{A} \cap B) \cup \emptyset)}{p(B)} && \text{prop. distributiva e } \overline{B} \cap B = \emptyset \\
 &= \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} && \emptyset \text{ é o elemento neutro da reunião} \\
 &= p(\overline{A}/B) && \text{c.q.m.}
 \end{aligned}$$